Musterlösung zu Übungsblatt 2

erstellt von Jan Stricker

5.S *Von den Kollisionswahrscheinlichkeiten zur Rayleighverteilung.*
a) Um die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}\left(\frac{T_g}{\sqrt{g}} \le t\right)$ mittels der Ausdrücke $w(n,g)$ (mit passendem n) auszudrücken, stellen wir zuerst die folgende Gleichheit von Ereignissen fest:

$$\left\{\frac{T_g}{\sqrt{g}} \le t\right\} = \{T_g \le t\sqrt{g}\} = \{T_g \le \lfloor t\sqrt{g}\rfloor\}.$$

(Zur Erinnerung: für $x \in \mathbb{R}$ ist $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl k mit $k \le x$.) Wegen der Additivität der Wahrscheinlichkeit gilt

$$\mathbf{P}(T_g \in \{1, \dots, g+1\}) = \mathbf{P}(T_g \le \lfloor t\sqrt{g}\rfloor) + \mathbf{P}(T_g > \lfloor t\sqrt{g}\rfloor)$$

Außerdem gilt $\mathbf{P}(T_g \in \{1, \dots, g+1\}) = 1$, woraus

$$\mathbf{P}(T_g \le \lfloor t\sqrt{g}\rfloor) = 1 - \mathbf{P}(T_g > \lfloor t\sqrt{g}\rfloor)$$

folgt. (Manche von Ihnen werden diese Gleichheit direkt aus der aus der Schule bekannten Formel für die Gegenwahrscheinlihkeit gefolgert haben – was auch o.k. ist.). Damit haben wir

$$\mathbf{P}\left(\frac{T_g}{\sqrt{g}} \le t\right) = 1 - \mathbf{P}(T_g > \lfloor t\sqrt{g}\rfloor) = 1 - w(\lfloor t\sqrt{g}\rfloor, g)$$

Laut dem Hinweis auf dem Übungsblatt konvergiert die rechte Seite für $g \to \infty$ gegen $1 - e^{-t^2/2}$. Also:

$$F(t) := \lim_{g\to\infty} \mathbf{P}\left(\frac{T_g}{\sqrt{g}} \le t\right) = 1 - e^{-t^2/2}.$$

b) Hier hilft der Hauptsatz der Differential-und Integralgleichung: $F(t) - F(0) = \int_0^t F'(s)ds$. Die Ableitung von F ist (Kettenregel!)

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\left(1 - e^{-s^2/2}\right) = se^{-s^2/2} \Rightarrow F(t) - F(0) = \int_0^t se^{-s^2/2}\,ds$$

und $F(0) = 0$, also ergibt sich

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds$$

mit $f(s) := se^{-s^2/2}, \quad s \ge 0$. (Dieses f heißt übrigens *Dichtefunktion der Standard-Rayleigh-Verteilung, mehr dazu im weiteren Verlauf der Vorlesung.)*

c) Siehe Abbildung **??** auf Seite 3, geplottet mit Mathlab. Die Maximalstelle von f bestimmen wir durch Ableiten:
$f'(s) = e^{-s^2/2} - s^2e^{-s^2/2}$. Diese Funktion hat auf $\mathbb{R}_+$ ihre einzige Nullstelle bei $s = 1$. Das passt auch zum Augenmaß!

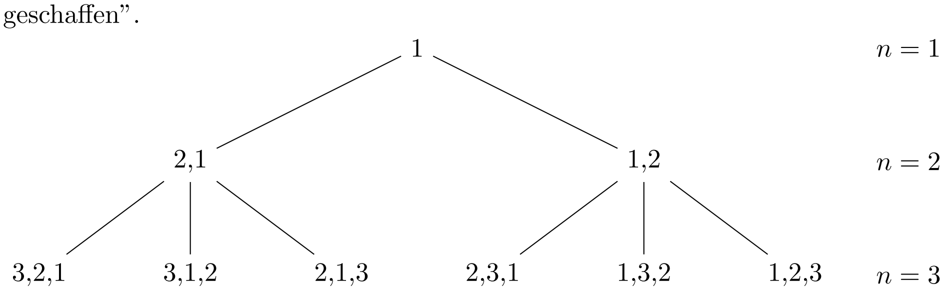
d) Vorschlag: nimm für g die drei Quadratzahlen $10^2, 20^2, 40^2$. Siehe dafür S.4 Abbildung 2-4. Die Plots der Verteilungsgewichte von $T_g/\sqrt{g}$ sehen für verschiedene g fast gleich aus (und ganz ähnlich wie die Funktion f aus c)), nur dass sich für größer werdendes g das Gesamtgewicht 1 auf immer mehr Ausgänge verteilt (und die einzelnen Gewichte kleiner werden). Das maximale Verteilungsgewicht von T_g liegt bei $\sqrt{g}$, und das maximale Verteilungsgewicht $T_g/\sqrt{g}$ liegt bei 1; dies ist auch die Maximalstelle von f.

6. *Zwei rekursive Verfahren zur Erzeugung rein zufälliger Permutationen.*
a) Wir überprüfen, dass das in der Aufgabe definierte Π eine rein zufallige Permutation von $1, \ldots, n$ ist. In der Tat ist für jede Permutation $(a(1), \ldots, a(n))$ das Ereignis

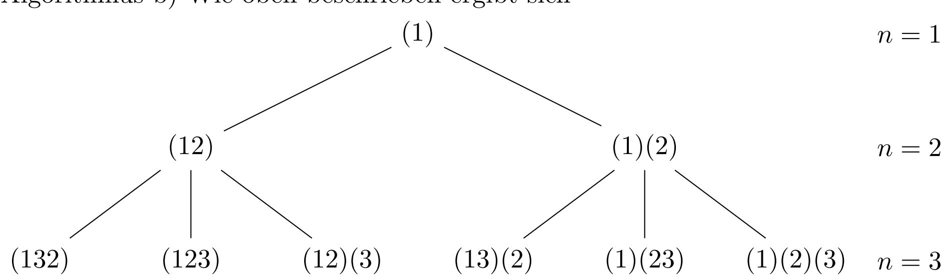
$$E := \{\Pi(1) = a(1), \ldots, \Pi(n) = a(n)\}$$

nach Konstruktion gleich dem Ereignis $\{\ell = a(n), X_1 = a(1), \ldots, X_{n-1} = a_{n-1}\}$, und weil für jeden der n gleich wahrscheinlichen Ausgänge von ℓ nach Voraussetzung alle $(n-1)!$ möglichen Ausgänge von $(X_1, \ldots, X_{n-1})$ die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{(n-1)!}$ haben, hat das Ereigns E die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n!}$.
b) Ähnlich wie in a) gehen wir induktiv vor. Angenommen die Zyklendarstellung $\mathfrak{Z}$ ist die einer rein zufälligen Permutation von $1, \ldots, n-1$. Im Schritt von $n-1$ zu n "verzweigt" jeder der $(n-1)!$ möglichen Ausgänge, und zwar jeweils in n verschiedene , gleich wahrscheinliche "Nachfolger". Je zwei der so entstehenden $(n-1)!n = n!$ Ausgänge unterscheiden sich in ihrer Zyklenstruktur, beschreiben also verschiedene (und damit alle) Permutationen von $1, \ldots, n$. Und alle diese $n!$ Ausgänge sind gleich wahrscheinlich!

c) Wir geben jeweils die 6 Pfade an, die von der trivialen Permutation (von 1) zu den 6= 3! Permutationen von 1,2,3 führen. Dabei stellen wir jeweils die drei "Generationen" $(n = 1, 2, 3)$ in Form eines Baumes dar,
Algorithmus a): Im Schritt von $n-1$ zu n "verzweigt" die aktuelle Pemutation $\pi(1), \ldots, \pi(n-1)$ in n mögliche "Nachfolger", entsprechend den n möglichen Wahlen $\ell = 1, \ldots, n$. Anschaulich gesprochen wird der Funktionswert von n als eines der Elemente von $\{1, \ldots, n\}$ gewählt und dafür durch passendes Verschieben eines Teils der $\pi(1), \ldots, \pi(n-1)$ um Eins nach oben "Platz geschaffen".



Algorithmus b) Wie oben beschrieben ergibt sich



7. *Tabuwahrscheinlichkeiten.* Wir treffen eine g-mal wiederholte rein zufällige Wahl aus den Plätzen $\{1, \ldots, g\}$.
a) Ich biete hier zwei Lösungswege an:
1. *Abzählen der günstigen Möglichkeiten*: Es gibt g Möglichkeiten bei einer Platzwahl. Weiterhin wählen wir g-mal wiederholt. Es gibt also insgesamt g^g mögliche Wahlprotokolle. Wir haben bei jeder Wahl $g-1$ Ausgänge, die den Platz 1 vermeiden. Wählen wir nun g-mal nicht Platz 1, haben wir $(g-1)^g$ alsdie Anzahl "günstiger" Wahlprotokolle . Also:

$$v_g = \mathbf{P}(\text{Treffe nie Platz 1 bei } g\text{-maligem Wählen}) = \frac{(g-1)^g}{g^g} = \left(1 - \frac{1}{g}\right)^g .$$

2.*Nur Misserfolge beim g-maligen $1/g$-Münzwurf, vgl. Vorlesung 2b*: Die Wahrscheinlichkeit bei g Plätzen genau auf Platz 1 zu kommen ist $p := \frac{1}{g}$. Die Wahrscheinlichkeit für g Misserfolge bei den ersten g Versuchen ist also

$$v_g = (1-p)^g = \left(1 - \frac{1}{g}\right)^g.$$

b) Es ist bekannt, dass $\quad (*) \quad \lim_{g\to\infty} \left(1 + \frac{a}{g}\right)^g = e^a$. Also gilt

$$\Rightarrow \lim_{g\to\infty} v_g = \lim_{g\to\infty} \left(1 - \frac{1}{g}\right)^g = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

(Für alle, die es interessiert, ist hier ein schnelles Argument für $(*)$:

$$\left(1+\frac{a}{g}\right)^g = \left(\exp\left(\ln\left(1+\frac{a}{g}\right)\right)\right)^g = \exp\left(\frac{\ln(1+a/g)}{1/g}\right) \overset{g\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left(\frac{d}{dx}\ln(1+ax)\mid_{x=0}\right) = \exp(a).)$$

8.S *Besetzungen bei der wiederholten rein zufälligen Wahl vs. uniform verteilte Besetzungen.* Wir betrachten die Menge $S_{4,6} := \{(b_1, \ldots, b_6) : b_j \in \mathbb{N}_0,\, b_1 + \cdots + b_6 = 4\}$ der Besetzungen von $g = 6$ Plätzen mit $n = 4$ Objekten (bei erlaubten Mehrfachbelegungen).
a) Es gibt genau eine Besetzung, bei der alle 4 Objekte auf Platz 1 gesetzt werden. Es gibt $|S_{4,6}| = \binom{4+6-1}{4} = \binom{9}{4} = 126$ mögliche Besetzungen in $S_{4,6}$ nach der Formel aus der Vorlesung. Nach dem Prinzip "Anzahl günstige durch Anzahl mögliche Ereignisse" bekommen wir:

$$\mathbf{P}(U_1 = 4) = \frac{1}{126} \approx 0,0079$$

b) Für das in der Aufgabe definierte $h(X) = (Z_1, \ldots, Z_6) := h(X)$ ist das Ereignis $\{Z_1 = 4\}$ gleich dem Ereignis $\{X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 1\} = \{X = (1,1,1,1)\}$. Es gibt genau ein Element aus S der Form $(1,1,1,1)$. Insgesamt gibt es $|S| = 6^4 = 1296$ Möglichkeiten für Elemente aus S, das Element $(1,1,1,1)$ ist eines davon. Nach dem Prinzip "Anzahl günstige durch Anzahl mögliche Ereignisse" bekommen wir:

$$\mathbf{P}(Z_1 = 4) = \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 1) = \frac{1}{1296} \approx 0,0008.$$

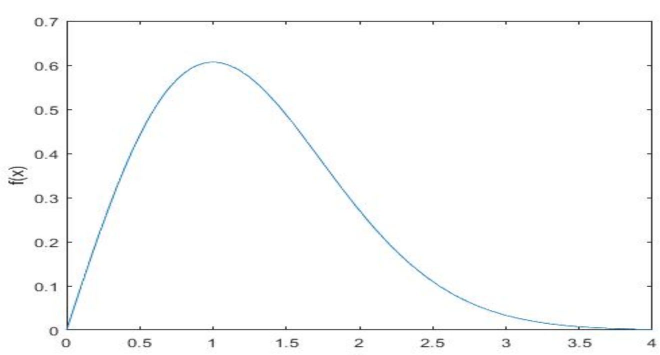


Abbildung 1: Graph der Funktion $f : x \mapsto xe^{-x^2/2}$ erstellt mit Mathlab

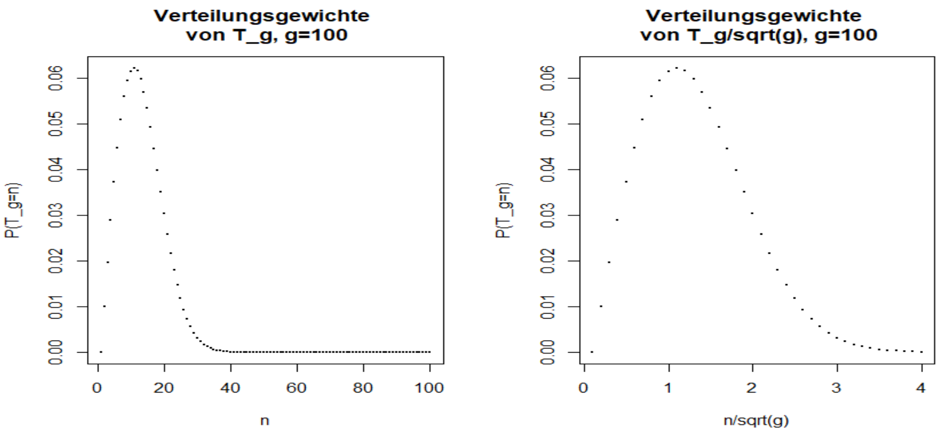


Abbildung 2: Ausgabe bei $g = 10^2$

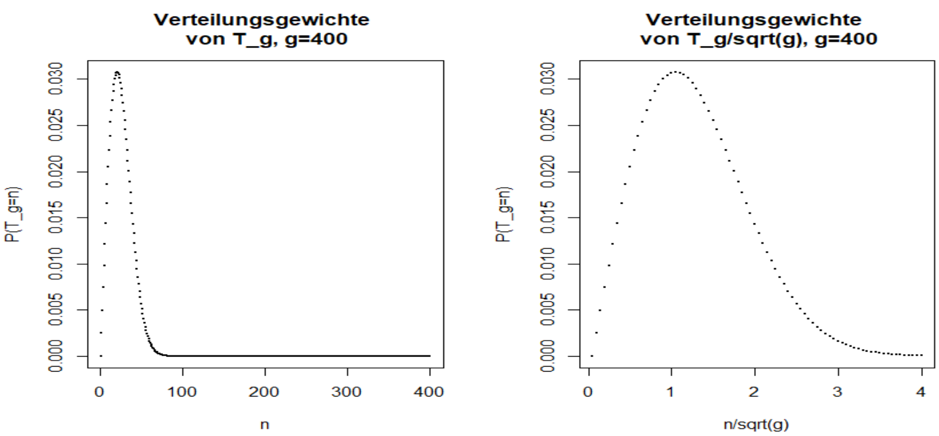


Abbildung 3: Ausgabe bei $g = 20^2$

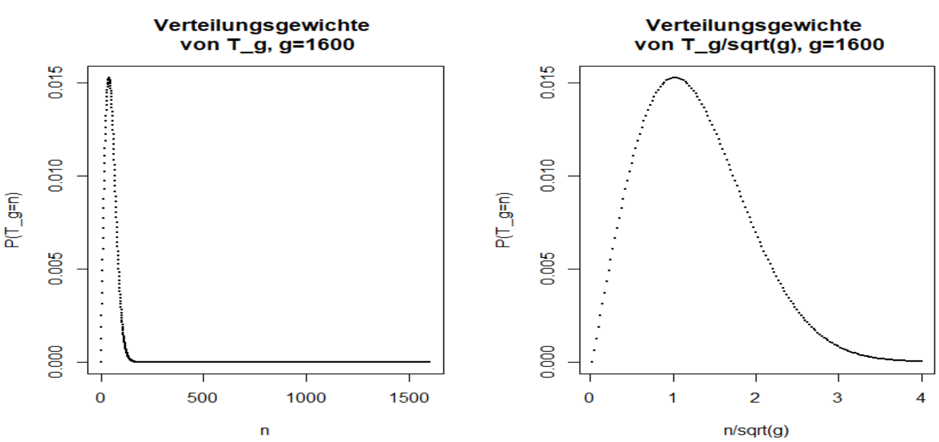


Abbildung 4: Ausgabe bei $g = 40^2$